**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**"Уфимский государственный авиационный технический университет"**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**Дисциплина:** Методы оптимизации

**Отчет по лабораторной работе № 2**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА**

**МЕТОД ШТРАФОВ**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа МКН-415 | Фамилия И.О. | Подпись | Дата | Оценка |
| Студент | Сиротин А.Е. |  |  |  |
| Принял | Казакова Т.Г. |  |  |  |

**Уфа 2022**

**Цель:** приобретение навыков численного решения задач поиска условного экстремума действительной функции.

**Задание**

Рассмотрим задачу поиска минимума функции

Множество допустимых решений задается следующими условиями:

1. Найти решение поставленной задачи условной оптимизации, используя теоремы о необходимых и достаточных условиях.
2. Найти решение задачи безусловной оптимизации для заданной целевой функции в пакете Maple (Optimization).
3. Найти приближенное решение задачи согласно варианту методом штрафов, с заданной точностью .
4. Провести анализ найденного приближенного решения (является ли стационарная точка точкой экстремума).

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

### **1.1 КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ**

В данном методе для ограничений типа равенств используется метод внешних штрафов.

1. Зададим следующие значения:

– размерность вектора ;

– число ограничений-равенств;

– число всех ограничений;

– точность решения задачи;

– точность решения задачи безусловной минимизации;

– номер итерации;

– начальное приближение для , задается так, чтобы строго выполнялись ограничения типа неравенств ;

– начальное значение параметра штрафа, обычно ;

– число для увеличения параметра штрафа.

1. Задаем вспомогательную функцию

где штрафная функция

или

Можно использовать разные значения для внутренних и для внешних штрафов.

1. Найдем значение , доставляющее минимум функции по при фиксированном с помощью одного из методов безусловной минимизации. В качестве начальной точки используется , в качестве параметра окончания – константа .
2. Вычислить . Если , то решение задачи найдено , в противном случае переходим к шагу 5.
3. Изменяем значения: . Возвращаемся к 2.

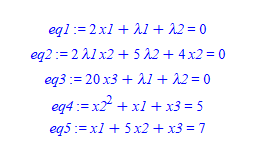
# 2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### **2.1 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ**

Составим функцию Лагранжа:

Для нахождения стационарной точки воспользуемся необходимыми условиями:

Возьмем . Получим, что , что невозможно. Следовательно, этот вариант нам не подходит. Пусть теперь . Тогда система преобразуется к виду:



Из этой системы находим: , .

Решение задачи безусловной оптимизации для заданной целевой функции в пакете Maple(Optimization)



### **2.2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ**

Решим задачу (1.1) с условиями (1.2) с помощью комбинированного метода штрафных функций. Реализация решения на языке Python представлена в Приложении А. Результат работы программы представлен на Рисунке 1. Стационарная точка попадает в область допустимых решений и приблизительно равна стационарной точке, найденной аналитически.

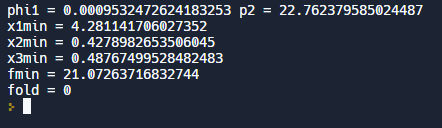


Рисунок 1 – Результат работы программ

Метод сходится, но на каждой итерации используется метод безусловной оптимизации (метод градиентного спуска с дробным шагом), который сходится за большое число шагов и является методом первого порядка.

# 3 ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Задача условной оптимизации. Задача поиска минимума (максимума) функции когда множество допустимых решений задается равенством и неравенствами:

функции 𝑓(𝑥), 𝑔𝑗 (𝑥),𝑗 = 1. . 𝑝 дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Пример практического применения: поиск параллелепипеда максимального объема, вписанный в эллипсоид

Критерий: .

1. Какая функция называется функцией Лагранжа задачи условной оптимизации?

Функцией Лагранжа называется функция вида:

где – целевая функция, – ограничения-равенства, – ограничения-неравенства.

1. Необходимые и достаточные условия решения задачи условной оптимизации первого и второго порядка.

***Теорема 1.***Точка является локальным минимумом задачи условной оптимизации (3), (4) тогда и только тогда, когда

1. функции выпуклые;
2. функции линейные;
3. существуют такие числа , что выполняются следующие условия:

* условие стационарности функции Лагранжа по *x*
* условие допустимости решения
* условие неотрицательности
* условие дополняющей нежесткости

Множество называется множеством активных в точке ограничений-неравенств.

Пусть линейно независимы.

***Теорема 2.***Точка является точкой строгого локального минимума задачи условной оптимизации (3), (4) тогда и только тогда, когда

1. существует вектор такой, что вектор удовлетворяет условиям 3 теоремы 1;
2. для любого ненулевого вектора , удовлетворяющего системе:

выполняется неравенство , где – матрица.

1. Какие численные методы решения задач условной оптимизации вы знаете?

Метод внешних штрафов, метод внутренних штрафов (барьерных функций), комбинированный метод.

1. Какие численные методы решения задач безусловной оптимизации вы знаете?

Метод градиентного спуска с дробным шагом, метод наискорейшего градиентного спуска, метод сопряженных градиентов метод Ньютона, метод Ньютона-Рафсона (модифицированный метод Ньютона), метод Марквардта.

1. Какие штрафные функции используются для ограничений-равенств? Какие штрафные функции используются для ограничений-неравенств?

Для ограничений типа равенств используется вспомогательная функция

где штрафная функция

– срезка функции

Для ограничений типа неравенств используется вспомогательная функция

где штрафная функция

1. Как задается начальная точка для штрафных методов решения задачи условной оптимизации?

Начальная точка задается либо вне, либо внутри (в зависимости от метода) множества допустимых решений , где задается следующими условиями

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе лабораторной работы был изучены методы нахождения условного экстремума целевой функции с различными способами задания области допустимых решений. Было найдено аналитическое решение данной задачи с использованием необходимых и достаточных условий, а также с помощью программы Maple. На языке Python был реализован метод внешних штрафных функций для решений той же задачи. Численное решение оказалось приблизительно равным решению аналитическому.

**Приложение А  
(обязательное)  
Листинги ПРограмм**

**А.1 Решение задачи условного экстремума**

https://github.com/xoma-star/MO\_LAB2\_PY